کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی عمومی۱-فنی**	نیمسال تابستان **۹۳**	مدرس : **سیدرضا موسوی**
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۳/۵/۲۶**	وقت : **۱۲۰** دقیقه

توجه :
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
قسمتهایی که با مداد نوشته شده باشد چرکنویس محسوب می‌شود.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- اگر $a=\sqrt{۳}+i$ و $b=۲e^{\frac{\pi i}{۳}}$ دو عدد مختلط باشند، مطلوب است مقادیر : $z_۱=a+۸b \quad , \quad z_۲=a^۸ b$ **۲۰ نمره**

سوال۲- حدهای مقابل را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{۲x-۳\cos x}{۲\sin x-x} \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x\tan ۲x-\tan^۲ ۳x}{x^۲}$ **۲۵ نمره**

سوال۳- نمودار تابع $y=\dfrac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۲x-۳}$ را رسم کنید. **۳۰ نمره**

سوال۴- نقطه M روی ارتفاع وارد بر قاعده یک مثلث متساوی الساقین قرار دارد. طول قاعده مثلث برابر ۱۰ و طول ساق آن برابر ۱۳ است. اگر L مجموع فاصله‌های نقطه M از سه راس مثلث باشد ، کمترین مقدار L چقدر است ؟ **۲۵ نمره**

سوال۵- انتگرال نامعین $\int\dfrac{۲x+۵}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}dx$ را حل کنید. **۳۰ نمره**

سوال۶- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{(۲x+۱)\sqrt{x^۲+x}}$ و محور xها در بازه $[۰,\infty)$ را بیابید. **۳۰ نمره**

سوال۷- ناحیه محدود به نیمدایره $y=\sqrt{۲-x^۲}$ و سهمی $y=x^۲$ را در نظر بگیرید.
الف) اگر این ناحیه حول محور xها دوران کند ، حجم جسم حاصل را بیابید.
ب) اگر این ناحیه حول محور yها دوران کند ، حجم جسم حاصل را بیابید. **۳۰ نمره**

سوال۸- الف) همگرایی یا واگرایی هریک از سریهای $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\sin\dfrac{۱}{n^۲}$ و $\sum\limits_{n=۲}^{\infty}\dfrac{۱}{n\ln^۲ n}$ را مشخص کنید.
ب) حوزه همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\dfrac{n!}{(۲n)!}(x-۱)^n$ را تعیین کنید. **۳۰ نمره**

موفق باشید

سوال ۱- برای محاسبه z_1 ، b را بر حسب مختصات دکارتی می‌نویسیم. $b = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1+\sqrt{3}\,i$

و در نتیجه : $z_1 = a + 8b = (\sqrt{3}+8) + (1+8\sqrt{3})i$

برای محاسبه z_2 ، a را بر حسب مختصات قطبی می‌نویسیم. $a = \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$

و در نتیجه : $z_2 = a^8 b = (2e^{\frac{\pi i}{6}})^8 (2e^{\frac{\pi i}{3}}) = 2^9\, e^{\frac{5\pi i}{3}} = 2^9\, e^{\frac{-\pi i}{3}}$

سوال۲- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\tan 2x - \tan^2 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\tan x}{x}\times\dfrac{\tan 2x}{x} - (\dfrac{\tan 3x}{x})^2] = 1\times 2 - 3^2 = -7$

برای محاسبه حد دوم ، چون $x\to\infty$ می‌توانیم فرض کنیم $x>3$ و از نامساویهای $-1\le \sin x,\cos x\le 1$ نتیجه می گیریم :

$$\frac{2x-3}{-2-x}\ge\frac{2x-3\cos x}{2\sin x - x}\ge\frac{2x+3}{2-x}$$

و چون $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{2-x}=-2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{-2-x}=-2$ داریم : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3\cos x}{2\sin x-x}=-2$

سوال۳- اگر مخرج را برابر صفر در نظر بگیریم داریم $x^2-2x-3=0$ و در نتیجه $x=-1,3$

پس دامنه تابع عبارت است از : $D_f = R-\{-1,3\}$

اگر $x\to -1,3$ آنگاه $y\to\pm\infty$ پس تابع دو مجانب قائم $x=-1$ و $x=3$ دارد.

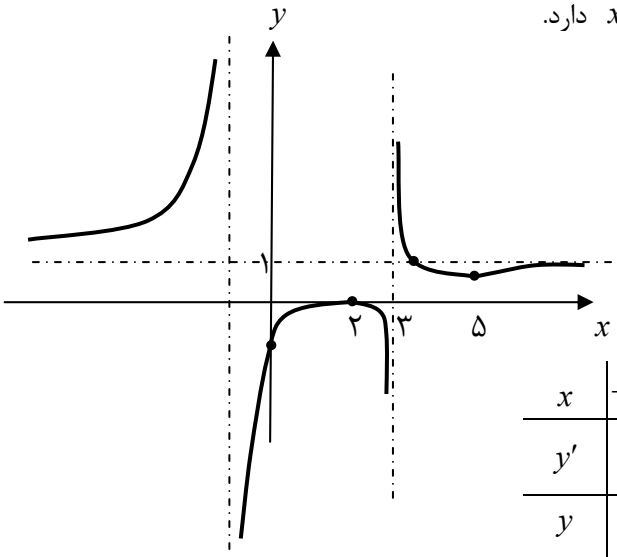
چون $x\to\pm\infty$ آنگاه $y\to 1$ پس تابع یک مجانب افقی $y=1$ دارد.

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم. $y' = \dfrac{2(x^2-7x+10)}{(x^2-2x-3)^2}$

اگر $y'=0$ آنگاه باید $x^2-7x+10=0$ یعنی $x=2\,,5$

و نقاط $(2,0)$ و $(5,\frac{3}{4})$ نقاط بحرانی تابع هستند.

اکنون جدول تغییرات را رسم می‌کنیم.

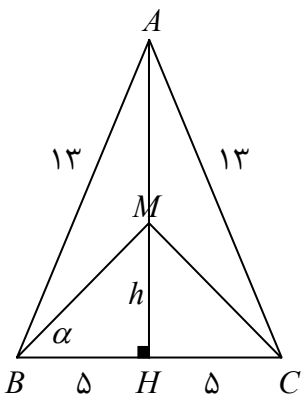


x	$-\infty$		-1		2		3		5		∞
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	∞	∞	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	∞	$\searrow$ $\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

سوال۴- مثلث متساوی الساقین ABC را رسم می‌کنیم. $BC=10$, $AB=AC=13$

ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم و نقطه M را بر روی آن در نظر می‌گیریم. داریم :

$$AH=12,\quad BH=CH=5\quad,\quad L=AM+BM+CM$$



برای مشخص شدن موقعیت مناسب نقطه M باید یا مقدار $h=MH$ و یا مقدار $\alpha=\angle MBH$ را پیدا کنیم. به دو روش مساله را حل می‌کنیم.

روش اول (محاسبه h) : داریم $L(h)=AM+BM+CM=12-h+2\sqrt{h^2+25}$

اکنون از مشتق استفاده می‌کنیم. $L'(h)=-1+\dfrac{2h}{\sqrt{h^2+25}}$

$$L'(h)=۰ \rightarrow -۱+\frac{۲h}{\sqrt{h^۲+۲۵}}=۰ \rightarrow \sqrt{h^۲+۲۵}=۲h \rightarrow h=\frac{۵}{\sqrt{۳}} \rightarrow MinL=L(\frac{۵}{\sqrt{۳}})=۱۲+۵\sqrt{۳}$$

روش دوم (محاسبه α) : داریم

$$L(\alpha)=AM+BM+CM=۱۲-۵\tan\alpha+\frac{۱۰}{\cos\alpha}$$

اکنون از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$L'(\alpha)=\frac{-۵}{\cos^۲\alpha}+\frac{۱۰\sin\alpha}{\cos^۲\alpha} \quad , \quad L'(\alpha)=۰ \rightarrow \frac{-۵}{\cos^۲\alpha}+\frac{۱۰\sin\alpha}{\cos^۲\alpha}=۰$$

$$\rightarrow ۱۰\sin\alpha=۵ \rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲} \rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۶} \rightarrow MinL=L(\frac{\pi}{۶})=۱۲+۵\sqrt{۳}$$

سوال۵- ابتدا باید کسر $\frac{۲x+۵}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}$ را تجزیه کنیم. مخرج کسر کاملا تجزیه شده است.

بنابر این حدس می‌زنیم :

$$\frac{۲x+۵}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{ax+b}{۴x^۲+۱}+\frac{cx+d}{x^۲-x+۱}$$

ضرایب مجهول a، b ، c و d را می توان به روشهای مختلف محاسبه کرد.

روش اول : اگر دو کسر سمت راست را با هم جمع کنیم داریم :

$$\frac{۲x+۵}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{(a+۴c)x^۳+(-a+b+۴d)x^۲+(a-b+c)x+(b+d)}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}$$

در نتیجه دستگاه معادلات مقابل به دست می آید.

$$\begin{cases} a+۴c=۰ \\ -a+b+۴d=۰ \\ a-b+c=۲ \\ b+d=۵ \end{cases}$$

با حل این دستگاه داریم : $a=۸ \ , \ b=۴ \ , \ c=-۲ \ , \ d=۱$

روش دوم : همچنین می توانستیم به x چند مقدار متمایز نسبت داده و یک دستگاه معادله دیگر بسازیم.

$$\begin{cases} x=۰ \rightarrow b+d=۵ \\ x=۱ \rightarrow \frac{a}{۵}+\frac{b}{۵}+c+d=\frac{۷}{۵} \\ x=-۱ \rightarrow \frac{-a}{۵}+\frac{b}{۵}-\frac{c}{۳}+\frac{d}{۳}=\frac{۱}{۵} \\ x=۲ \rightarrow \frac{۲a}{۱۷}+\frac{b}{۱۷}+\frac{۲c}{۳}+\frac{d}{۳}=\frac{۳}{۱۷} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+d=۵ \\ a+b+۵c+۵d=۷ \\ -۳a+۳b-۵c+۵d=۳ \\ ۶a+۳b+۳۴c+۱۷d=۹ \end{cases}$$

جواب این دستگاه ، همان جواب قبلی است. یعنی : $a=۸ \ , \ b=۴ \ , \ c=-۲ \ , \ d=۱$

روش سوم : دو طرف تساوی را در مخرج کسر اول ضرب کرده و هرجا $x^۲$ دیدیم به جای آن $\frac{-۱}{۴}$ می گذاریم :

$$\frac{۲x+۵}{\frac{-۱}{۴}-x+۱}=ax+b \rightarrow \frac{۴(۲x+۵)}{-۴x+۳}=ax+b$$

اکنون صورت و مخرج کسر حاصل را در مزدوج مخرج آن ضرب می‌کنیم.

$$ax+b=\frac{۴(۲x+۵)(۴x+۳)}{(-۴x+۳)(۴x+۳)}=\frac{۴(۸x^۲+۲۶x+۱۵)}{-۱۶x^۲+۹} \xrightarrow{x^۲=\frac{-۱}{۴}} ax+b=۸x+۴$$

پس داریم :

$$\frac{۲x+۵}{(۴x^۲+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{۸x+۴}{۴x^۲+۱}+\frac{cx+d}{x^۲-x+۱}$$

تا اینجا تکلیف یک کسر روشن شده است. آن را به سمت چپ برده و عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)}-\frac{8x+4}{4x^2+1}=\frac{cx+d}{x^2-x+1}\ \rightarrow\ \frac{-2x+1}{x^2-x+1}=\frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

یعنی $d=1$, $c=-2$. در این مرحله می توانستیم دو مقدار $x=0$ و $x=1$ را در تساوی قرار دهیم و مقادیر c و d را به دست بیاوریم.
در هر صورت ، اکنون کسر تجزیه شده است و می‌توانیم انتگرال را حل کنیم.

$$\int\frac{2x+5}{(4x^2+1)(x^2-x+1)}dx=\int\frac{8x+4}{4x^2+1}dx+\int\frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{8x}{4x^2+1}dx+2\int\frac{2}{(2x)^2+1}dx-\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln(4x^2+1)+2\arctan 2x-\ln(x^2-x+1)+c=\ln\frac{4x^2+1}{x^2-x+1}+2\arctan 2x+c$$

سوال۶- باید انتگرال $S=\int_0^\infty\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ را حل کنیم. آن را می‌توان با سه تغییر متغیر متفاوت حل کرد.

روش اول : از تغییر متغیر $t^2=x^2+x$ استفاده می‌کنیم. داریم $2tdt=(2x+1)dx$

$$S=\int_0^\infty\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}=\int_0^\infty\frac{(2x+1)dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\int_0^\infty\frac{(2x+1)dx}{(4x^2+4x+1)\sqrt{x^2+x}}=\int_0^\infty\frac{2tdt}{(4t^2+1)\sqrt{t^2}}=\int_0^\infty\frac{2dt}{(4t^2+1)}=\arctan 2t\,|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم : از تغییر متغیر $\frac{1}{2\sin t}=x+\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم $\sin t=\frac{1}{2x+1}$ و $\frac{-\cos t}{2\sin^2 t}dt=dx$

$$S=\int_0^\infty\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}=\int_0^\infty\frac{1}{2x+1}\times\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin t\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\sin^2 t}-\frac{1}{4}}}\times\frac{-\cos t}{2\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0-dt=\frac{\pi}{2}$$

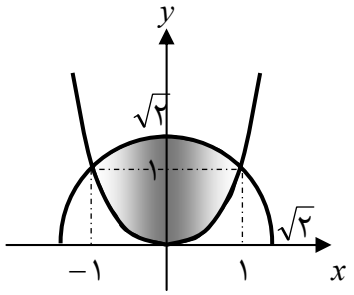
روش سوم : از تغییر متغیر $\frac{1}{2}\cosh t=x+\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم $\cosh t=2x+1$ و $\frac{1}{2}\sinh t\,dt=dx$

$$S=\int_0^\infty\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}=\int_0^\infty\frac{1}{2x+1}\times\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx=\int_0^\infty\frac{1}{\cosh t}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\cosh^2 t-\frac{1}{4}}}\times\frac{\sinh t}{2}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\cosh t}dt=\int_0^\infty\frac{2}{e^t+e^{-t}}dt=\int_0^\infty\frac{2e^t}{e^{2t}+1}dt=2\arctan e^t\,|_0^\infty=2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$

روش چهارم : داریم $S=\int_0^\infty\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}=\int_0^\infty\frac{dx}{x^2(2+\frac{1}{x})\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$. اکنون از تغییر متغیر $t^2=1+\frac{1}{x}$ استفاده می‌کنیم.

$$S=\int_\infty^1\frac{-2tdt}{(1+t^2)\sqrt{t^2}}=\int_1^\infty\frac{2dt}{1+t^2}=2\arctan t\,|_1^\infty=2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$



سوال۷- شکل تقریبی ناحیه مورد نظر را رسم می‌کنیم. یک ناحیه متقارن نسبت به محور y ها است.
الف) روش اول (روش قرص مستدیر) : اگر ناحیه مورد نظر حول محور x ها دوران کند ، پوسته خارجی آن را نیمدایره و پوسته داخلی آن را سهمی میسازد. بنابر این حجم جسم حاصل برابر است با تفاضل حجم ساخته شده توسط نیمدایره و حجم ساخته شده توسط سهمی .

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[(\sqrt{2-x^2})^2-(x^2)^2]dx=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^4)dx=\pi[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1}=2\pi[2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]=\frac{44}{15}\pi$$

روش دوم (روش پوسته استوانه‌ای) :

$$V=4\pi\int_{0}^{1}y\sqrt{y}dy+4\pi\int_{1}^{\sqrt{2}}y\sqrt{2-y^2}]dy$$

$$=4\pi[\frac{2}{5}y^2\sqrt{y}]_0^1+4\pi[-\frac{1}{3}(2-y^2)\sqrt{2-y^2}]_1^{\sqrt{2}}=4\pi(\frac{2}{5}+\frac{1}{3})=\frac{44}{15}\pi$$

ب) روش اول (روش قرص مستدیر) : اگر ناحیه مورد نظر حول محور y ها دوران کند ، قسمتی از پوسته خارجی آن را نیمدایره و قسمت دیگر پوسته خارجی آن را سهمی می‌سازد و پوسته داخلی هم ندارد. بنابر این حجم جسم حاصل برابر است با مجموع حجمهای ساخته شده توسط نیمدایره و سهمی .

$$V=\pi\int_{0}^{1}(\sqrt{y})^2dy+\pi\int_{1}^{\sqrt{2}}(\sqrt{2-y^2})^2dy$$

$$=\pi\int_{0}^{1}ydy+\pi\int_{1}^{\sqrt{2}}(2-y^2)dy=\pi[\frac{y^2}{2}]_0^1+\pi[2y-\frac{y^3}{3}]_1^{\sqrt{2}}=\pi(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3})=\pi(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})$$

روش دوم (روش پوسته استوانه‌ای) :

$$V=2\pi\int_{0}^{1}x[\sqrt{2-x^2}-x^2]dx=2\pi\int_{0}^{1}[x\sqrt{2-x^2}-x^3]dx$$

$$=2\pi[\frac{-1}{3}(2-x^2)\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{4}x^4]_0^1=2\pi[-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{3}]=\pi(-\frac{7}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3})$$

سوال۸- الف) چون $n\geq 1$ پس $0<\frac{1}{n^2}<\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $0<\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$.

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ نیز همگراست.

تابع $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ در بازه $[2,\infty)$ مثبت و نزولی است و چون $\int_{2}^{\infty}f(x)dx=\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\frac{-1}{\ln x}|_2^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

یعنی انتگرال $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ همگراست پس طبق آزمون انتگرال ، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ نیز همگراست.

ب) ناحیه همگرایی این سری تمام مجموعه اعداد حقیقی است. داریم : $a_n=\frac{n!}{(2n)!}$

روش اول (آزمون نسبت) :

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\div\frac{n!}{(2n)!}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{n!}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=0$$

پس شعاع همگرایی برابر $R=\infty$ و ناحیه همگرایی تمام مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود.

روش دوم (آزمون ریشه) :

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\times(n+2)(n+1)}}$$

$$<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\times n\times n\times\cdots\times n\times n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

یعنی $\frac{1}{R}=0$ و شعاع همگرایی برابر $R=\infty$ و ناحیه همگرایی تمام مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود.